722. Kompaktum ノ Sphäre ヘノ Abbildung ニツイテ

坂田 良次（阪大）

Kompaktum R ノ次元ト Sphäre S_n ヘノ R ノ stetige Abbildung トノ関係トシテ Alexandroff-Hurewicz ノ定理ガ知ラレテイル。

（Alexandroff-Hurewicz ノ定理）[1]

$\dim R \leqq n$ ナルタメ必要且ツ充分ナ條件ハ任意ノ閉集合 $A \subset R$ ノ S_n ヘノ stetige Abbildung ガ R ノ S_n ヘノソレニ erweitern デキルコトデアル。

Borsuk ハコノ定理ノ必要條件ノ方ヲ擴張シテ次ノ定理ヲ得テイル。

---

1) P. Alexandroff: Dimensionstheorie 1. Hauptsatz (Math. Ann. 106)

W. Hurewicz: Über Abbildungen topologischer Räume auf die n-dimensionale Sphäre (Fund. Math. 24)

Hurewicz ハ必要條件ノ時ニハ R ガ Kompaktum デアルコトヲ必ズシモ必要トシナイコト，即チ metrisierbar, separabel デヨイコトヲ示シタ。

（Borsuk ノ定理）[2]

Kompaktum R ガ $\dim R \leqq n$ ナラバ任意ノ開集合 $A \subset R$ ノ S_k ヘノ stetige Abbildung f ニ對シテ閉集合 $E \subset R-A$ ガアツテ $\dim E < n-k$ デアリ f ハ $R-E$ ノ S_k ヘノ Abbildung ニ擴張デキル。（$k=0, 1, \cdots\cdots$）

---

2) K. Borsuk: Un théorème sur les prolongements des transformations (Fund. Math. 29)

コノ場合モ R ハ metrisierbar, separabel デ充分デアル。實際ハ Borsuk ハ遙カニ一般ナ定理ヲ証明シテイルケレドモ、コヽデハ証明ハノベナイ。唯コノ定理ハソレ自身トシテヨリハ例ヘバ Borsuk ノ Homologietypenklasse ノ理論デ重要デアルト思ハレルノデ結果ダケカイテオキマス。（Homologie typenklasse ニツイテハ: Borsuk: Sur les groupes des classes de transformations continues (C. R. 202)).

$m+1$ 次元 Kugel ヲ Q_{m+1}, ソノ Sphäre ヲ S_m トスル。

X ノ各点 $x \in X$ ニ於テスベテノ近傍 $U(x)$ ニ對シテ適當ナ近傍 $V(x)$ ガアツテ $S_m \xrightarrow{f} V(x)$ ガ常ニ $Q_{m+1} \xrightarrow{f^*} U(x)$ ニ erweitern デキルトキ X ハ localement connexe en dimension m トイフ。

又 $S_m \xrightarrow{f} M$ ガスベテ $Q_{m+1} \xrightarrow{f^*} M$ ニ erweitern デキルトキ connexe en dimension m トイフ。

（Borsuk ノ定理）

$$\left\{\begin{array}{l} X, Y \text{ metrisierbar, separabel} \\ \quad Y \text{ ハソノ上 localement connexe en dimensions} < n, \\ \quad \text{connexe en dimensions} < k \\ X_0 \subset X \text{ ハ } \dim(X-X_0) \leqq n \text{ ノ閉集合} \end{array}\right.$$

—— 次頁ヘツヅク.

コゝデハ Hurewicz ノ方法ヲツカッテ Borsuk ノ定理ノ紹介ヲカネテ逆モ成立スルコトヲ述ベテミタイト思ヒマス。3)

§1.

(Hauptsatz) Kompaktum R ガ $\dim R \leqq n$ ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ任意ノ閉集合 $A \subset R$ ニ於ケル $A \xrightarrow{f} S_k$ ガ $R-E \xrightarrow{f^*} S_k$ ニ erweitern デキルコトデアル。但シ $E \subset R-A$ ハ R ノ閉集合デ $\dim E < n-k$

n 次元ユークリッド空間 E_n ヘノ R ノ stetige Abbildung ノ全体ヲ $\mathfrak{F}_n(R)$ $(n=0, 1, 2, \cdots\cdots)$, E_n ノ原点 $P=(0, 0, \cdots\cdots 0)$ トシ P ヲ Bild ニモツ R ノ集合ガ $\dim \underset{x \in R}{E}[f(x)=P] \leqq m$ ニナル Abbildung f ノ集合ヲ $\mathfrak{F}_n^m(R) \subset \mathfrak{F}_n(R)$ デ表ハス。

Kompaktum R ニ對シテ

I. $\dim R \leqq n$

(脚註2ノツヾキ)

ソノトキ $X_0 \xrightarrow{f} Y$ ニ対シテ $\dim E < n-k$ ノ閉集合 $E \subset X-X_0$ ガアッテ

f ハ $X-E \xrightarrow{f^*} Y$ ニ erweitern デキル。

3) 1) ノ Hurewicz ノ論文ハ $k=n$ ノ場合デ、コノ論文全体ヲ拡張シタ形デ紹介スルコトニナリマス。

ユークリッド空間ヘノ Abbildung ヲ Hilfsmittel トシテツカフ方法デアリマス。

II. R ノ任意ノ閉集合 A ニ於ケル $f \in S_k^A$ [4] ガ常ニ $f^* \in S_k^{R-E}$ ニ erweitern デキル。但シ $E \subset R-A$ ハ R ノ閉集合デ $\dim E < n-k$ $(k=0, 1, \cdots\cdots)$

III. $\mathfrak{F}_k(R)$ ニ於テ $\mathfrak{F}_k^{n-k}(R)$ ガ dicht デアル。($k=0, 1, \cdots\cdots$) ガ äquivalent デアルコトヲ次ノ順序デ証明スル。

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I} \rightarrow \mathrm{II} \\ \mathrm{II} \rightarrow \mathrm{III} \end{array}\right\} (\S 2)$$ コヽデハ R ハ metrisierbar, separabel ト假定シテ証明スル。[5]

$\mathrm{III} \rightarrow \mathrm{I}$ $(\S 3)$ Abbildungsraum ト考ヘテ mengentheoretisch ナ問題ニ帰着サセル。

---

4) X^Y ハ Y ノ X ヘノ stetige Abbildung ノ全体カラデキル Abbildungsraum.

Abbildungsraum ニツイテハ §2 ヲミテイタゞキタイ。

5) R ガ Kompaktum ノトキハ $\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{III}$ ガモット精密ニワカッテイル: 原点バカリデナク各点 p ノ Urbild ノ集合 $\underset{x \in R}{E}[f(x)=p]$ ノ次元ガ $\leq n-k$ ニナル Abbildung ガ $\mathfrak{F}_k(R)$ デ dicht デアル。(Hurewicz: Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmenge Cartesischer Räume (Sitzungsber Preussischen Akad. 34)) R ガ metrisierbar separabel ノトキニモ成立スルカモシレナイケレドモマダワカッテヰナイ。

コレヲツカヘバ $\mathrm{I} \rightarrow \mathrm{II}$ ハ非常ニ簡單デアル: Q_{k+1} ヲ半徑 1 ノ $k+1$ 次元 Kugel S_k ヲソノ Sphäre トスル。

$f \in S_k^A$ ヲ erweitern シテ $f' \in Q_{k+1}^R$ トシ上ノ結果ノ証明ノ仕方カラ A デ $f(x)=f'(x)=f''(x)$ デ (次頁ヘツヅク)

§ 2.

Lemma 1. R *metrisch, Separabel* $A, A_i \subset R$ 閉集合 $(i=1,2)$ $A=A_1+A_2$, $\dim(R-A)\leqq n$ トスル。

ソウスレバ $R_i \supset A_i$, $R_1+R_2=R$, $\dim(R_1\cdot R_2-A_1\cdot A_2) \leqq n-1$ ナル閉集合ガ存在スル。

証明 $$G_1=\underset{x}{E}[\rho(x,A_1)<\frac{1}{2}\rho(x,A_2)\,;\ x\in R]$$

$$G_2=\underset{x}{E}[\rho(x,A_2)<\frac{1}{2}\rho(x,A_2)\,;\ x\in R]$$

トスレバ

$$G_1 \supset A_1-A_1\cdot A_2$$

$$G_2 \supset A_2-A_1\cdot A_2$$

$$\overline{G_1}\cdot\overline{G_2} \subset A_1\cdot A_2$$

$\overline{G_1}-A_1$, $\overline{G_2}-A_2$ ハ離レタ $R-A$ ノ中ノ閉集合デ $\dim(R-A)\leqq n$ ダカラコレヲ高々 $n-1$ 次元ノ閉集合デ分ケルコトガデキル。

即チ $R-A$ ニ於ケル閉集合 B_1, B_2 ガ存在シテ

$$R-A=B_1+B_2,\quad B_1G_2=B_2G_1=0,\quad \dim B_1B_2\leqq n-1.$$

(脚注5ノツヾキ)

$\dim \underset{x\in R}{E}[f''(x)=P]<n-k$. $x\in Q_{k+1}-S_k$ ナル *Abbildung* f'' ガ存在スル。

今 $E=\underset{x}{E}[f''(x)=P]$ トスレバ $\dim E<n-k$.

$f^*(x)=\dfrac{f''(x)}{|f''(x)|}$ $x\in X-E$ トオケバ $f^*\in S_k^{X-E}$ ハ f ノ *Erweiterung* ニナッテイル。(証明了)

ヨッテ

$$R_1 = B_1 + A_1, \quad R_2 = B_2 + A_2$$

トオケバ、R_1, R_2 ハ求ムル開集合トナル。　　（証明了）

<u>I → II</u> ハ次ノ Borsuk ノ定理ヲ証明スレバ充分デアル。

（Borsuk ノ定理）[5]

R metr. sep. $A \subset R$ 開集合 $\dim(R-A) \leqq n$ ナラバ $f \in S_k^A$ ニ對シテ $E \subset R - A$, $\dim E < n-k$ ナル閉集合 E ガアッテ f ハ $f^* \in S_k^{X-E}$ ニ erweitern デキル.
（$k = 0, 1, \cdots\cdots$）（$n \leqq k$ ノトキハ E ハ空集合ト考ヘル）

証明. k ニツイテノ Induktion.

1) $k = 0$ 　S_0 ハ二点 P_1, P_2 デアル。

$A_i = \underset{x \in A}{E}[f(x) = P_i]$ トオケバ離レタ開集合.

$A = A_1 + A_2$ 　假定ニヨリ $\dim(R-A) \leqq n$

$\therefore$ Lemma 1 ニヨッテ $R_i > A_i$ $\dim R_1 R_2 \leqq n-1$ ナル開集合 R_i ガアル。

$E = R_1 R_2$ 　$f^*(x) = P_i$ $(x \in R_i - E)$

トオケバ f^* ハ求メルナノ Erweiterung デアル。

2) $k' < k$ デ成立スルモノトスル。

S_k ヲ Hemisphäre Y_1, Y_2 ニワケル。

$Y_1 \cdot Y_2 = S_{k-1}$

$A_i = \underset{x \in A}{E}[f(x) \in Y_i]$ トオケバ 閉集合デ

$A = A_1 + A_2$, $\dim(R-A) \leqq n$ トカラ Lemma 1 ニヨリ 開集合.

$R_i \supset A_i$ ガアッテ $\dim(R_1 \cdot R_2 - A_1 A_2) \leqq n-1$

$A_1 \cdot A_2$ ノ上ダケデ考ヘレバ f ハ $A_1 A_2 \xrightarrow{f} S_{k-1}$

Induktion ノ假定ニヨッテ $R_1 R_2$ ノ閉集合 E。

$E \subset R_1 \cdot R_2 - A_1 \cdot A_2 \quad \dim E < (n-1)-(k-1) = n-k$

ガアッテ $\bar{f} \in S_{k-1}^{R_1 R_2 - E}$ ニ erweitern デキル。

$B_i = R_i + (R_1 R_2 - E)$ ハ $R_i - E$ ノ閉集合.

$\therefore \quad R_i - E \xrightarrow{f_i} Y_i$ ヘ erweitern デキル。

E ハ $R_1 R_2$ ノ閉集合ダカラ勿論 R ノ閉集合.

$$f^*(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in R_1 - E \\ f_2(x) & x \in R_2 - E \end{cases}$$

トオケバ $f^* \in S_k^{X-E}$ ハ求ムルモノデアル。

—— 証明了 ——

P ヲ topologischer Raum, Q ヲ Kompaktum トスル。

$P \xrightarrow{f} Q$ stetige Abbildung ノ全体 Q^P ハ Abbildungsraum ト考ヘテ Metrik ハ

$$\rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in P} d(f_1(x), f_2(x)), \quad f_1, f_2 \in Q^P$$

デ與ヘラレル。[6]

Q^P ニ関シテハ beschränkt デ vollständig デアルコトガ容易ニワカル。(P, Q metr. デ Q ハ vollständig ナラ Q^P モ vollständig デ容易) 念ノタメニ述ベレバ: Q デノ Metrik ヲ d デ表ハス。

---

6) Alexandroff-Hopf: Topologie I. Erster Teil.

$f_1, f_2 \in Q^P \quad \rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in P} d(f_1(x), f_2(x)) \leqq \sup_{x, y \in Q} d(x, y)$
$= \delta(Q)$

又 $f_n \in Q^P \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$

$$\lim_{n_i, n_j \to \infty} \rho(f_{n_i}, f_{n_j}) = 0 \quad \text{トスレバ}$$

スベテノ $x \in P$ ニ對シテ

$$\lim_{n_i, n_j \to \infty} d(f_{n_i}(x), f_{n_j}(x)) = 0$$

Q ハ Kompaktum デアッタカラ

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \in Q$$

$$d(f(x), f_n(x)) \leqq \sup_{m > n} d(f_m(x), f_n(x)) \leqq \sup_{m > n} \rho(f_m, f_n)$$

假定ニヨリ

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{m > n} \rho(f_m, f_n) = 0$$

f_n ハ gleichmässig ニ f ニ收斂スルカラ f モ stetige デ $f \in Q^P$. シカモ $\lim_{n \to \infty} \rho(f, f_n) = 0$ 故ニ Q^P ハ vollständig.

Lemma 2. P モ Kompaktum トスレバ Q^P ガ separabel デアル。

證明: Q ヘノ P ノ Abbildung 全体[7] (連續デナイモノモヒックルメテ) ヲ Γ デ表ハス。$Q^P \subset \Gamma$. Γ ノ Metrik ハ前ト同様ニ定義スル。

---

7) コノ Lemma ノ證明デハ Abbildung ト唯云ッタダケデハ stetig デナイモノモ予想シテイル。ココ以外ノ所デハ Abbildung ハスベテ stetige ナモノバカリヲ考ヘル。

P ノ Basis ヲ $\{R_i\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots)$ トスル。

$$P \subset R_{n_1}+R_{n_2}+\cdots\cdots+R_{n_k}$$

ナルヤウナ有限ノ Überdeckung ニ對シテ $(n_1, n_2, \cdots\cdots n_k)$ ヲ對應サセレバカヽル集合 $\Sigma \underset{def}{\equiv} \{(n_1, n_2, \cdots\cdots n_k)\}$ ハ可附番個デアル。

$\alpha=(n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k)$ ニ對シテ

$$S_\alpha^{(1)}=R_{n_1},\ S_\alpha^{(2)}=R_{n_2}-R_{n_1},\ \cdots\cdots\cdots,\ S_\alpha^{(k)}=R_{n_k}-R_{n_1}-\cdots\cdots-R_{n_{k-1}}$$

ヲツクレバ disjunkt ナ集合ニナル。

Q ニ於テ dicht ナ集合ヲ D トシ, Γ_α ヲ各 $S_\alpha^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots\cdots k)$ デハ（D ニ屬スル）同ジ値ヲトル $P \xrightarrow{f} D$ ナル Abbildung ノ全体トスル。

Γ_α ハ明ラカニ可附番個、從ッテ $\Gamma_\Sigma \underset{def}{\equiv} \sum_{\alpha\in\Sigma}\Gamma_\alpha$ モ亦可附番個デアル。$Q^P \subset \overline{\Gamma_\Sigma}$ ヲイヘバ充分デアル。（Γ モ metrischer Raum!)

$g \in Q^P$, $\varepsilon>0$ ガ與ヘラレタトスル。

$$G_x = \underset{y}{E}\left[d(g(x), g(y)) < \frac{\varepsilon}{2}\right] \qquad x \in P$$

ハ P ノ開集合。各点 $x\in P$ ニ對シテ $x \in R_{n(x)} \subset G_x$ ヲツクレバ P ガ Kompaktum デアルコトカラ有限個ノ Überdeckung ガツクレル。ソレニ對應シテ $\alpha=(n(x_1), n(x_2), \cdots\cdots n(x_n)) \in \Sigma$.

D ハ Q デ dicht デアッタカラ a_i ガアッテ

$$d(a_i, g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad a_i \in D$$

$f(x) = a_i$, $x \in S_\alpha^{(i)}$ デ定義サレタ Abbildung

ハ Γ_Σ ニ属シ，$x \in P$ ニ對シテ

$$d(f(x), g(x)) \leqq d(a_i, g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) < \varepsilon$$

故ニ Γ ニ於ケル f, g ノ距離

$$\rho_P(f, g) = \sup_{x \in P} d(f(x), g(x)) \leqq \varepsilon$$

―― 證明了 ――

<u>II → III</u> モ metrisierbar, separabel ノトキ

ノ證明ヲスル。

定理[5)] 1. R metr. sep. $\dim M \leqq n$ ナラバ

$\mathfrak{F}_k^{n-k}(R)$ ハ $\mathfrak{F}_k(R)$ デ dicht デアル。

證明: 任意ノ $\varepsilon > 0$, $f \in \mathfrak{F}_k(R)$ ニ對シテ

$\dim E[f'(x) = P] \leqq n-k$（$P$ ハ k 次元ユークリッド空間ノ原点）

$$\rho(f(x), f'(x)) \leqq \varepsilon \qquad x \in M$$

ナル $f'(\in \mathfrak{F}_k^{n-k}(R))$ ガアルコトヲイヘバヨイ。

$$Q_k = \underset{x}{E}\left(\rho(x, P) \leqq \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad S_{k-1} = \underset{x}{E}\left[\rho(x, P) = \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$X = \underset{x}{E}[f(x) \in Q_k], \qquad X_0 = \underset{x}{E}[f(x) \in S_{k-1}]$$

トオケバ Borsuk ノ定理カラ

X ノ開集合 $E \subset X - X_0$, $\dim E \leqq n-k$

ガアリ X_0 デ考ヘタ f ハ

$$f^* \in S_{k-1}^{X-E}$$

ニ erweitern デキル。

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & x \in R - X \\ \dfrac{\rho(x,E)}{\rho(x,E)+\rho(x,X_0)} \cdot f^*(x) & x \in X - E \\ 0 & x \in E \end{cases}$$

トスレバ $f' \in \mathfrak{F}_k^{n-k}(R)$ デ $\rho(f, f') \leqq \varepsilon$

—— 証明了 ——

§3.

Lemma 3. $\left.\begin{array}{l} A, B \text{ metr. vollständig, separabel} \\ A \times B \text{ Cartesisches Produkt} \end{array}\right\}$ トスル。

$M \subset A \times B$ ガ G_δ デ $A \times B$ デ *dicht* ナラバ A デ *dicht* ナ $N \subset A$ ガ存在シテスベテノ $a \in N$ ニ對シテ $(a, x) \in M$ ナル x ノ集合ガ B デ *dicht* ニナル。

証明: B ノ *Basis* ヲ R_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$

$$M = \prod_{i=1}^{\infty} O_i \; (O_i \text{ offen}) \quad O_i \supset M \text{ ダカラ dicht.}$$

$(a, r_n) \subset O_i$ ナル $r_n \in R_n$ ガ少クトモ一ツ存在スル $a \in A$ ノ集合ヲ E_{n_i} トスル。O_i ハ *offen* ダカラ a ノ充分小サイ近傍ガ E_{n_i} ニ屬シ、從ッテ E_{ni} ハ *offen* デアル。

又 O_i ハ *dicht* ダカラ E_{ni} ハ A デ *dicht*. *Baire* ノ

---

8) $A \times B$ ハ $C = (a, b)$ $a \in A$, $b \in B$ ナル *Paar* ノ集合全体デ *Metrik* ハ $\rho(c_1, c_2) = \sqrt{\rho^2(a_1, a_2) + \rho^2(b_1, b_2)}^2$ ト定義スル。

Vielfachheitssatz[9] ニヨッテ $\prod_{i=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty} E_{ni} = N \in A$ デ dicht。従ッテ N ノ各点 x ニ対シテ $(x, y) \subset O_i$ ナル y ノ集合 G_i ハ B デ offen デ dicht.

モウ一度上ノ定理ヲツカヘバ $G = \prod_{i=1}^{\infty} G_i$ ハ B デ dicht.

ソレ故ニ $N \subset A$ ガ A デ dicht デ $(a, x) \in M$. $a \in N$ ナル x ノ集合 G ハ B デ dicht. —— 証明了 ——

$\mathfrak{F}_n(R)$ ヲ前ノヤウニ Kompaktum R ノ n 次元ユークリッド空間 E_n ヘノ Abbildung 全体トスル。明ラカニ

$\mathfrak{F}_n(R)$ ハ Cartesisches Product $\mathfrak{F}_m(R) \times \mathfrak{F}_{n-m}(R)$ ト考ヘラレル。

E_n ノ原点 P ノ f ニヨル Urbild ヲ $\underset{x}{E}[f(x) = P]$ トスルトキ $\mathfrak{F}_{n\varepsilon}^{m}(R)$ ヲ $m+1$ 次元ノ Urysohn ノ Konstante[10] $d_{m+1}\,\underset{x}{E}[f(x) = P] < \varepsilon$ ナルヤウナ Abbildung 全体トスル。

$$\mathfrak{F}_{n\varepsilon}^{m} \subset \mathfrak{F}_n(R)$$

---

9) R ガ vollständig metr. ナラバ R ニ於ケル dicht デ offen ナ集合ノ高々可附番個ノ Durchschnitt モ亦 R デ dicht. (Alexandroff-Hopf. S. 108)

10) (= coefficient d'aplatissement de dimension $m+1$, 集合 M ニ対シテ $d_{m+1}(M)$ ハ M ノ有限個ノ閉集合ニヨル η-Überdeckung デドノ $m+2$ 個モ Durchschnitt ガナイヤウナ η ノ untere Grenze.
M ガ Kompaktum ノトキハ $\dim M \leqq m$ ナルタメノ必要且ツ充分ナ条件ハ $d_{m+1}(M) = 0$ (Urysohn: Sur les multiplicités Cantoriennes (Fund. Math. 8))

Urysohn ノ Konstante ノ性質カラ明ラカ＝

$$\mathfrak{F}_n^m(R)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\mathfrak{F}_{n\frac{1}{\nu}}^m$$

$\mathfrak{F}_{n\varepsilon}^m(R)$ ガ $\mathfrak{F}_n(R)$ デ offen ＝ナルコト從ツテ $\mathfrak{F}_n^m(R)$ ハ G_δ ＝ナルコトヲ証明スル。

先ヅ $d_{m+1}\underset{x}{E}[f(x)=P]<\varepsilon$ ナラバ充分小サナ δ ＝對シテ $d_{m+1}\underset{x}{E}[f(x)\in K_\delta]<\varepsilon$ ナル。（但シ K_δ ハ radius δ デ中心ヲ P トスル Kugel）

何故ナラバ $E[f(x)=P]$ ハ閉集合デ $d_{m+1}\underset{x}{E}[f(x)=P]<\varepsilon$ ダカラ開集合＝ヨル ε-Überdeckung $\{G_1, G_2, \cdots\cdots, G_n\}$ ガアツテドノ $m+2$ 個モ Durchschnitt ガナイ。

$$\sum_{i=1}^{n}G_i=U\supset\underset{x}{E}[f(x)=P] \text{ ナル } U \text{ ハ } d_{m+1}(U)<\varepsilon.$$

δ ヲ充分小サクトレバ $U\supset\underset{x}{E}[f(x)\in K_\delta]$ ＝デキル.
故＝コノ δ ヲトレバ $d_{m+1}\underset{x}{E}[f(x)\in K_\delta]<\varepsilon$.

Lemma 4. $\mathfrak{F}_{n\varepsilon}^m(R)$ ハ $\mathfrak{F}_n(R)$ デ offen. $\mathfrak{F}_n^m(R)$ ハ G_δ.

証明: $f\in\mathfrak{F}_{n\varepsilon}^m(R)$ δ ヲ上ノイミトスル。

$\mathfrak{F}_n(R)$ ノ中ノ $\rho(f,\varphi)<\delta$ ＝ナル φ ヲトレバ

$y\in\underset{x}{E}[\varphi(x)=P]$ ＝対シテ $\rho(f(y),P)<\delta$

從ツテ $f(\underset{x}{E}[\varphi(x)=P])\subset K_\delta$

$$\underset{x}{E}[\varphi(x)=P]\subset\underset{x}{E}[f(x)\in K_\delta]$$

$$d_{m+1}\underset{x}{E}[\varphi(x)=P]\leqq d_{m+1}\underset{x}{E}[f(x)\in K_\delta]<\varepsilon$$

$\therefore\ \varphi \in \mathfrak{F}^m_{n\varepsilon}(R)$

—— 証明了 ——

<u>III → I</u>

定理 2[11]. $\mathfrak{F}^m_n(R)$ ガ $\mathfrak{F}_n(R)$ デ dicht ナラバ

$\dim R \leqq m+n$. R ハ Kompaktum.

証明: n ニツイテノ Induktion

1) $n=0$. E_0 ハ一点ト考ヘルカラ $\dim R > m$ デハアリ得ナイ。

2) $n' < n$ デ成立スルモノトスル。

$\mathfrak{F}_n(R)$ ヲ Cartesisches Produkt $\mathfrak{F}_1(R)\times\mathfrak{F}_{n-1}(R)$ ト考ヘテ $\mathfrak{F}_n(R)$ ガ vollständig, separabel ナコト及ビ Lemma 4 カラ $\mathfrak{F}^m_n(R)$ ガ G_δ デ仮定カラ $\mathfrak{F}_n(R)$ デコレガ dicht デアルコトヲ思出セバ Lemma 3 カラ $\mathfrak{F}_1(R)$ デ überall dicht ナ集合 $\mathfrak{N}$ ガ存在シテスベテノ $f \in \mathfrak{N}$ ニ対シテ $(f, \varphi) \in \mathfrak{F}^m_n(R)$ ナル φ ノ集合ガ

---

11) Lemma 3 ノ証明ノ仕方カラワカルヤウニ: A vollständig B sep. $A\times B \supset M$ ガ dicht デ offen ナラバ $A \supset N$ ガ存在シテ A デ dicht デ $(a, y) \in M$ ニナル y ノ集合ガ B デ dicht. 初メハスベテノ ε ニ対シテ $\mathfrak{F}^m_{n\varepsilon}(R)$ ガ $\mathfrak{F}_n(R)$ デ dicht ナラバ $\dim R \leqq m+n$ ヲコノコトヲツカッテ証明シマシタ。$\mathfrak{F}^m_n(R)$ ガ dicht ナラバ $\mathfrak{F}^m_{n\varepsilon}(R)$ ガ dicht ダカラコレカラ定理 2 ガデマス。Durchschnitt ヲ後デトルカ前デトルカノチガヒデ内容ニハカハリハナイノデスガ Lemma 3 ハソレ自身役ニ立ツカト思ヒマス。
尚 Lemma 3 ハ角谷氏ニ教ヘテ頂イタモノデアリマシテ深ク感謝致シマス。

$\mathfrak{F}_{n-1}(R)$ デ dicht.

$f \in \mathfrak{N}$, $\underset{x}{E}[f(x)=P] \underset{def}{\equiv} E(f)$ トスレバ $(f, \varphi) \in \mathfrak{F}_n^m(R)$ トイフコトハ $\dim[\underset{x}{E}[\varphi(x)=P]\cdot E(f)] \leqq m$.

但シココデハ P ハ E_{n-1} ノ原点ト考ヘル。

$E(f)$ ガ leer デナケレバ $\mathfrak{F}_{n-1}^m(E(f))$ ガ $\mathfrak{F}_{n-1}(E(f))$ デ dicht。何故ナラバ $g \in \mathfrak{F}_{n-1}(E(f))$ ハ $g^* \in \mathfrak{F}_{n-1}(R)$ ニ erweitern デキルカラ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シテ

$$\rho((f, g^*);\ (f, \varphi)) < \varepsilon$$

ニナルヤウナ $(f, \varphi) \in \mathfrak{F}_n^m(R)$ ガアル。$E(f)$ デ考ヘレバ

$$\rho(g, \varphi) < \varepsilon, \quad \varphi \in \mathfrak{F}_{n-1}^m(E(f)).$$

Induktion ノ假定ニヨリ $E(f)$ ハ高々 $m+n-1$ 次元。ダカラ $\dim E(f) \leqq m+n-1$ ナル如キ Abbildung f ガ $\mathfrak{F}_1(R)$ デ dicht.

A, B ヲ任意ノ共通点ノナイ R ノ閉集合トスレバ

$$f(x) = \rho(x, B) - \rho(x, A)$$

ハ $\mathfrak{F}_1(R)$ ニ属シ A, B デソレゾレ $\geqq \varepsilon > 0$, $\leqq -\varepsilon < 0$ トナル如キ $\varepsilon > 0$ アリ。コノ性質ヲ失ハナイヤウナ $f \in \mathfrak{N}$ ガトレル。$E(f)$ ハ A, B ヲ分カツ高々 $m+n-1$ 次元ノ集合ダカラ

$$\dim R \leqq m+n$$

—— 証明了 ——

以上デ Kompaktum R ニ對シテ I, II, III ガ äquivalent デアルコト、從ツテ同時ニ〈Hauptsatz〉

ノ証明ガ完結スル。